Формальные методы в программной инженерии

Система верификации Why3

магистерский курс, 2023

Шелехов Владимир Иванович,
зав. лаб. Системного программирования ИСИ, к.т.н.,
Институт Систем Информатики, Новосибирск,
Новосибирский Государственный Университет,
vshel@iis.nsk.su, р.т. (383) 330-27-21, ИСИ СО РАН, к.269

20.10.23 ФМЗ Лекция 1

Архитектура Why3. Язык WhyML

Команды интерактивного доказательства

http://why3.lri.fr/manual.pdf

Платформа Why3
Команды Why3
Типы, термы, выражения языка WhyML
Модули, предикаты, функции
Спецификации
Примеры
Команды интерактивного доказательства

Платформа Why3

Язык программирования и спецификаций **WhyML**

Графический интерфейс платформы **Why3**.

Язык команд для запуска и управления режимами **Why3**.

http://why3.lri.fr/ - сайт **Why3**

Внешние инструменты автоматического доказательства.

SMT-решатели: **Alt-Ergo, CVC3, CVC4, Simplify, veriT, Yices, Z3;**

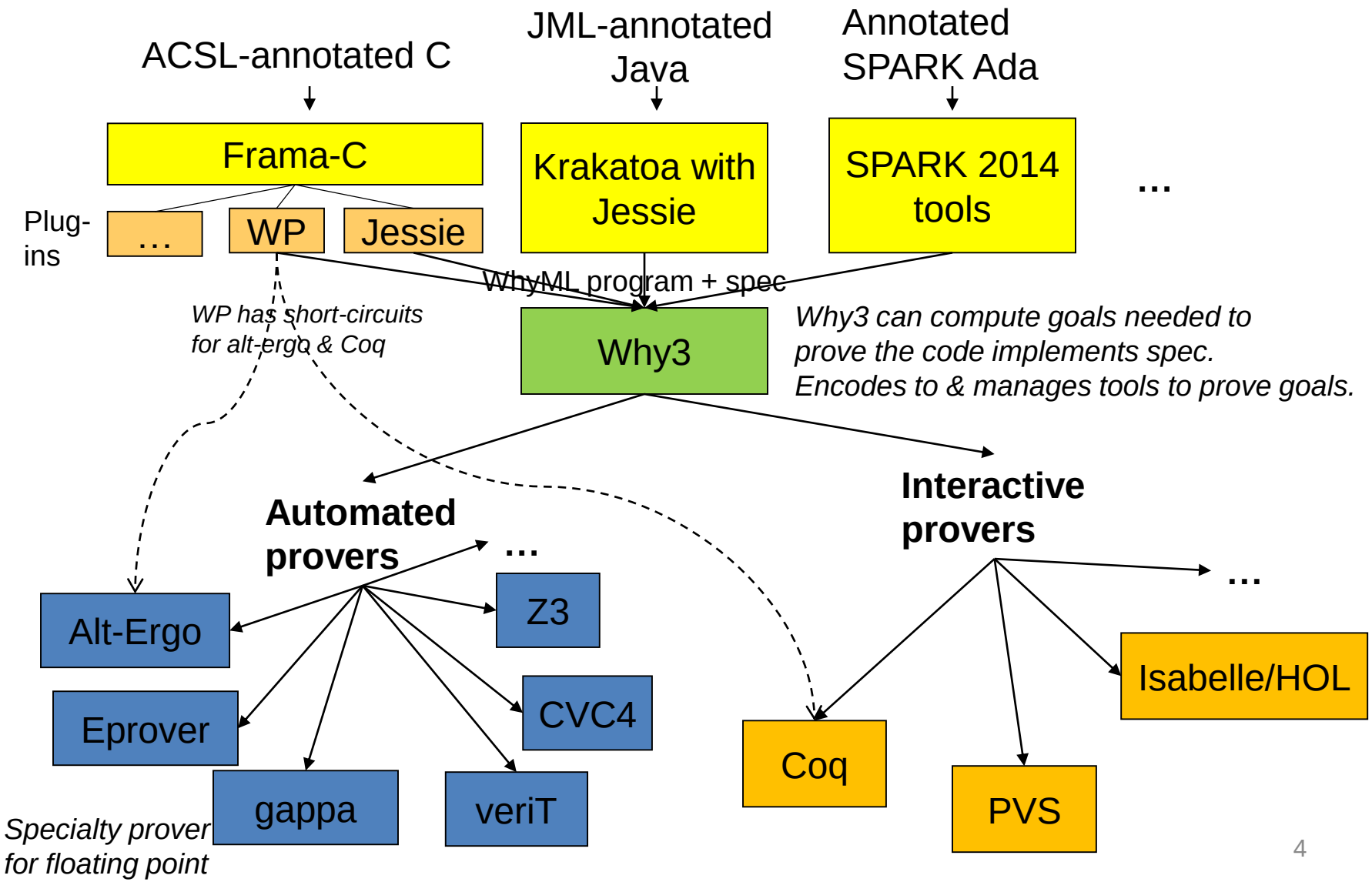
Другие автоматические инструменты: **Beagle, E prover, Gappa, Metis, Metitarski, Princess, Psyche, SPASS, Vampire.**

Инструменты интерактивного доказательства:
Coq, PVS, Isabelle/HOL.

Команды доказательства (трансформации)

Стандартная библиотека теорий для поддержки доказательства

Применение Why3



Командный интерфейс Why3

Запуск инструмента **Why3** с терминала:

why3 ide hello.mlw

Файл с расширением «mlw» -

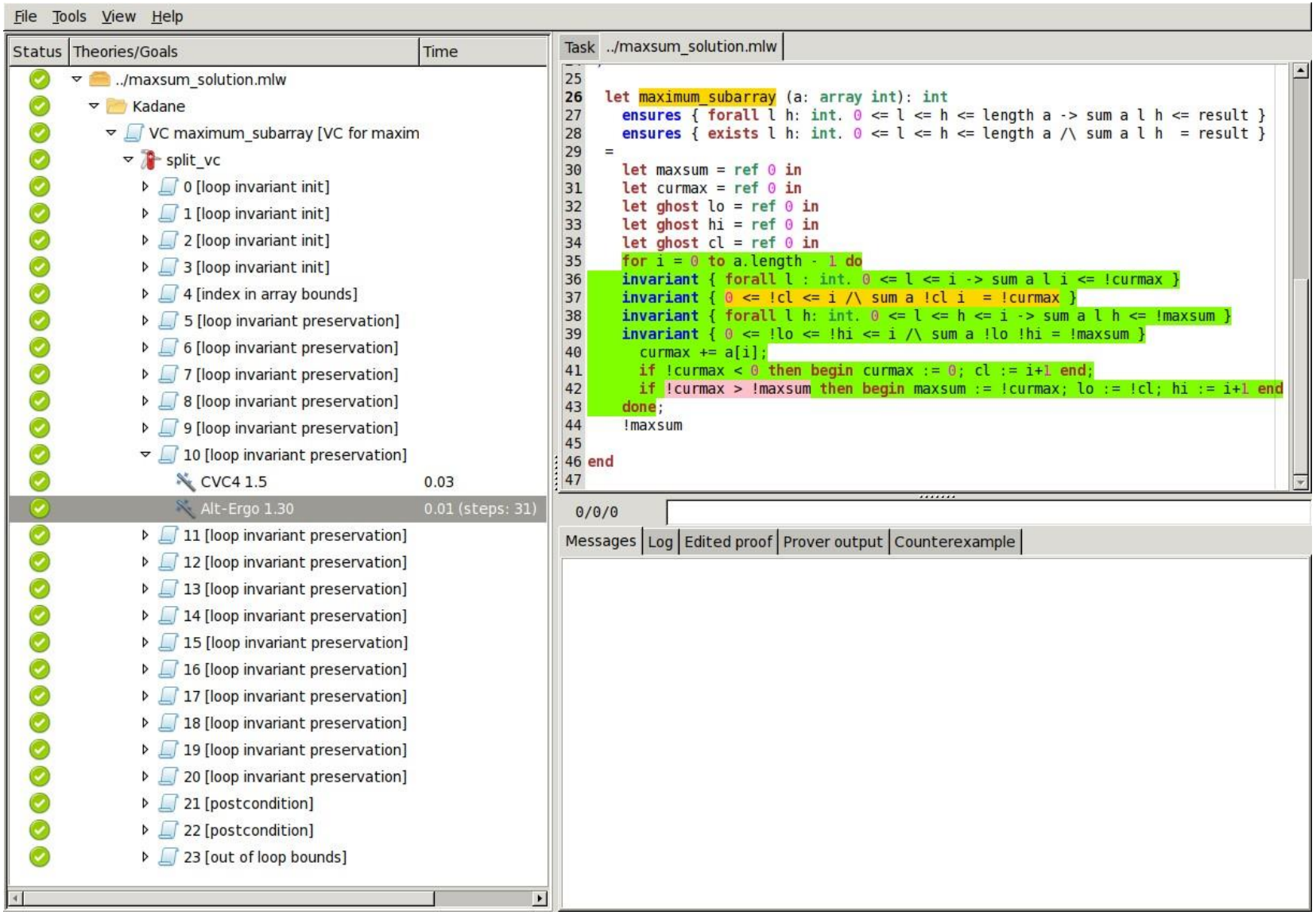
- программа (или теория) на языке **WhyML**

Директория .config

why3 config --detect-provers

why3 --list-provers

Why3 proof session



Структура языка WhyML

WhyML – язык функционального программирования.
Язык формул why3 первого порядка без типизации переменными – это термы term

Операторы – это выражения expr

Файл с расширением «mlw» -- посл-ть модулей
Модуль: **module** <имя модуля> <описания> **end**

Описания типов, констант, предикатов, функций, индуктивных определений, аксиом, теорем, исключений.
Импорт, экспорт, клонирование

Вкрапления императивных конструкций: модифицируемые переменные, циклы for и while, указатели

Язык WhyML. Лексика

Основные лексемы: целые и вещественные константы, литеры (типа **char**), строковые константы, имена, операции

Имена:

Со строчной буквы - имена переменных, типов, предикатов, функций.

С заглавной буквы - имена теорий, модулей, теорем, целей, …

С апострофа – аргументы типов.

Имя может завершаться апострофом

```
qualifier ::= (uident ".")+
lqualid ::= qualifier? lident
uqualid ::= qualifier? uident
```

Набор операций: префиксные, инфиксные.

4 приоритета инфиксных операций.

Префиксные сильнее инфиксных.

Язык WhyML. Типы

Простые встроенные типы: **int, real, char, bool, unit.**
Отображения (map), кортежи (tuple), алгебраические типы, простые диапазоны. Массивы

Типовые термы: простой тип

в позиции типа <имя типа> <параметры>

type -> type --mapping type

(type (, type)+) --tuple type

Описание типа:

type <имя типа> <параметры> = <определение типа>

Записи, алгебраические типы, простые диапазоны.

Параметры типов -- с апострофом

Тупли (type1, type2, ...)

Тип диапазон **type** r = <**range** a b> a и b --константы

Язык WhyML. Записи

Описание типа записи:

type t = { a: int; b: bool }

Агрегат { a = 42; b = true } - выражение типа запись

Модифицируемое поле:

type t = { **mutable** a: int; b: bool }

Разрешается оператор присваивания x.a <- 42

Спецификация: **writes** { x.a }

Инвариант типа:

type t = { **mutable** a: int; b: bool }

invariant { b = true -> a >= 0 } должен быть истинным в начале и конце

by { a = 42; b = true } свидетельство непустоты

let f2 (x: t) = x.a <- x.a - 1; **assert** { x.a < **old** x.a }; x.a <- 0

Язык WhyML. Алгебраические типы

Описание алгебраического типа:

```
type option 'a = None | Some 'a
```

'a – параметр типа, None и Some – конструкторы.

Рекурсивный тип списка:

```
type list 'a = Nil | Cons 'a (list 'a)
```

'a – параметр типа, Nil и Cons – конструкторы.

Примеры функций со списками

```
type list α = Nil | Cons α (list α)

function append(l1:list α,l2:list α): list α =
match l1 with
| Nil → l2
| Cons(x,l) → Cons(x, append(l,l2))
end

function length(l:list α): int =
match l with
| Nil → 0
| Cons(_,r) → 1 + length r
end

function rev(l:list α): list α =
match l with
| Nil → Nil
| Cons(x,r) → append(rev(r), Cons(x,Nil))
end
```

Язык WhyML. Термы

term ::= целые / вещественные константы | "true" | "false“

| имя переменной или константы

| <операция или имя функции> term+ также возможно (+), ([]), … в качестве префиксных

| <унарная префиксная> term

| "(" term ")" term в указанном контексте

| term "." lqualid поле записи

| "{" term_field+ "}" вида field = value

| “ {" term "with" term_field+ "}" модификация записи

| term "[" term "]" """* доступ к элементу коллекции (массиву)

| term "[" term "<-" term "]" """* модификация элемента коллекции

| term "[" term ".." term "]" """* вырезка коллекции

| term "[" term ".." "]" """* | term "[" ".." term "]" """* справа и слева

Агрегат { a = 42; b = true } - выражение типа запись

Коллекция: отображение, массив, список, последовательность

Язык WhyML. Другие термы

term ::= …….

| "if" term "then" term "else" term условный терм

| "match" term "with" term_case+ "end“ разбор случаев; pattern matching

| "let" pattern "=" term "in" term let-binding

| "{" (lqualid "=" pattern ";")+ "}" record pattern

| <имя конструктора> pattern* конструктор

| pattern "," pattern tuple pattern

term_case ::= "|" pattern "->" term

pattern ::= binder variable or "_"

binder ::= "_" | bound_var

bound_var ::= lident attribute*

Формулы why3

Часть конструкций term и expr

```
formula ::= true | false | formula -> formula          implication
          | formula <-> formula                        equivalence
          | formula /\ formula                         conjunction
          | formula && formula                         asymmetric conj.
          | formula \/ formula                         disjunction
          | formula || formula                         asymmetric disj.
          | not formula                                negation
          | prefix-op term
          | term infix-op term
          | lqualid term+                              predicate application
          | if formula then formula else formula       conditional
          | let pattern = term in formula              local binding
          | quantifier binders (, binders) . formula   quantifier   forall | exists
          | ( formula )                                parentheses
```

Язык WhyML. Выражения

expr ::= тот же набор конструкций, что и для термов, плюс:

| expr spec+ выр с добавленной спецификацией
| "match" expr "with" ("|" pattern "->" expr)+ "end" выр по образцу
| qualifier? "begin" spec+ expr "end" абстрактный блок
| expr ";" expr последовательность выражений
| "let" pattern "=" expr "in" expr выр с приставкой let
| "let" "rec" fun_defn ("with" fun_defn)* "in" expr рекурсивная функция
| "while" expr "do" invariant* variant? expr "done" цикл loop
| "for" lident "=" expr ("to" | "downto") expr "do" invariant* expr "done"
| "for" pattern "in" expr "with" uident ("as" lident_nq)? "do" invariant*
| ("assert" | "assume" | "check") "{" term "}" assert
| "raise" uqualid expr? | "raise" "(" uqualid expr? “)" возбуждение исключения
| "try" expr "with" ("|" handler)+ "end" выр с обработкой исключений
| "label" uident "in" expr помеченное выражение

Язык WhyML. Функции. Предикаты

| function function-decl (with logic-decl)
| predicate predicate-decl (with logic-decl)
| inductive inductive-decl (with inductive-decl)

function_decl ::= lident_nq attribute* type_param* ":" type ("=" term)*
predicate_decl ::= lident_nq attribute* type_param* ("=" formula)
| lident_nq attribute* type_param*
inductive_decl ::= lident_nq attribute* type_param* "=" "|"? ind_case ("|" ind_case)*

ind_case ::= ident_nq attribute* ":" formula
tqualid ::= uident | ident ("." ident)* "." uident
type_param ::= "'" lident | lqualid | "(" lident+ ":" type ")"
| "(" type ("," type)* ")" | "()"

Индуктивные определения

```
module Order
      type t
      predicate (<=) t t
      axiom le_refl: forall x: t. x <= x
      axiom le_asym: forall x y: t. x <= y -> y <= x -> x = y
      axiom le_trans: forall x y z: t. x <= y -> y <= z -> x <= z
end

module SortedList
    use list.List
   clone export Order with axiom le_refl, axiom le_asym, axiom le_trans
    inductive sorted (list t) =
      | Sorted_nil: sorted Nil
      | Sorted_one: forall x: t. sorted (Cons x Nil)
      | Sorted_two: forall x y: t, l: list t. x <= y -> sorted (Cons y l) ->
                                 sorted (Cons x (Cons y l))
end
```

Язык WhyML. Спецификации

spec ::= "requires" "{" term "}" предусловие
  | "ensures" "{" term "}" постусловие
  | "returns" "{" ("|" pattern "->" term)+ "}" постусловие возвращаемых значений
  | "raises" "{" ("|" pattern "->" term)+ "}" постусловие исключений.
  | "raises" "{" uqualid ("," uqualid)* "}" возбуждаемые исключения
  | "reads" "{" lqualid ("," lqualid)* "}" внешние переменные по чтению
  | "writes" "{" path ("," path)* "}" объекты памяти по записи
  | "alias" "{" alias ("," alias)* "}" тождественные объекты памяти (aliases)
  | variant подсказка для доказательства завершения
  | "diverges“ возможно не завершается
  | ("reads" | "writes" | "alias") "{" "}" нет объектов указанного вида
path ::= lqualid ("." lqualid)* v.field1.field2
alias ::= path "with" path arg1 with result
invariant ::= "invariant" "{" term "}" инвариант цикла или инвариант типа
variant ::= "variant" "{" variant_term ("," variant_term)* "}" termination variant
variant_term ::= term ("with" lqualid)? терм + Well Formed порядок

Пример: isqrt

```
let isqrt(x:int): int
    requires x ≥ 0
    ensures result ≥ 0 ∧
      sqr(result) ≤ x < sqr(result + 1)
body
let ref res = 0 in  let ref sum = 1 in
 while sum ≤ x do
    res <- res + 1;
    sum <- sum + 2 * res + 1
  done;  res
```

Использование аксиом

Example: division

```
function div(real,real):real
axiom mul_div:
        forall x,y. y≠0 → div(x,y)*y = x
```

Example: factorial

```
function fact(int):int
axiom fact0:  fact(0) = 1
axiom factn:
   forall n:int. n ≥ 1 → fact(n) = n * fact(n-1)
```

Спецификация факториала без аксиом

```
let function fact (n:int) : int
requires { n ≥ 0 }
variant { n }
= if n=0 then 1 else n * fact(n-1)
```

generates the logic context

```
function fact int : int

axiom f_body: forall n. n ≥ 0 →
fact n = if n=0 then 1 else n * fact(n-1)
```

Язык WhyML. Декларации функций

let Definition – функция с параметрами, спецификацией и телом

val Declaration – функция с параметрами и спецификацией

let function Definition – чистая функция (без побочного эффекта), может использоваться в спецификации

let predicate Definition – чистая логическая функция. Может использоваться в спецификации как предикат

val function Declaration – чистая функция, может использоваться в спецификации

val predicate Declaration – чистая логическая функция. Может использоваться в спецификации как предикат

function Definition – функция why3. Может использоваться в невидимом коде

predicate Definition – предикат why3. Может использоваться в невидимом коде

let lemma – чистая лемма-функция (вместо док-ва по индукции)

Лемма-функции

- if a program function is *without side effects* and *terminating*:

```
let f (x1 : τ1, . . . , xn : τn) : unit
requires Pre
variant var ,
ensures Post
body Body
```

then it is a proof of

$\forall x_1, \ldots, x_n.\ Pre \rightarrow Post$

- Если *f* - рекурсивная, то доказательство сгенерированных формул корректности для рекурсивных вызовов помогает автоматически доказать леммы, обычно доказываемых по индукции

Клонирование модулей прод

```
let rec lemma exp_add (x: t) (n m: int)
    requires { 0 <= n /\ 0 <= m }
    variant { n }
    ensures { exp x (n + m) = mul (exp x n) (exp x m) }
= if n > 0 then exp_add x (n - 1) m

let rec lemma exp_mul (x: t) (n m: int)
    requires { 0 <= n /\ 0 <= m }
    variant { m }
    ensures { exp x (n * m) = exp (exp x n) m }
= if m > 0 then exp_mul x n (m - 1)

module ExponentiationBySquaring
  use int.Int
  clone Exp with type t = int, val one = one, val mul = (*)
end
```

лемма-функции

Система верификации Why3

Команды интерактивного доказательства (Трансформации)

Организация трансформаций Why3

Трансформация – команда, применяемая к текущей доказываемой формуле (цели). В результате получается другая формула или несколько других целей.

Имя трансформации. Параметры трансформации.

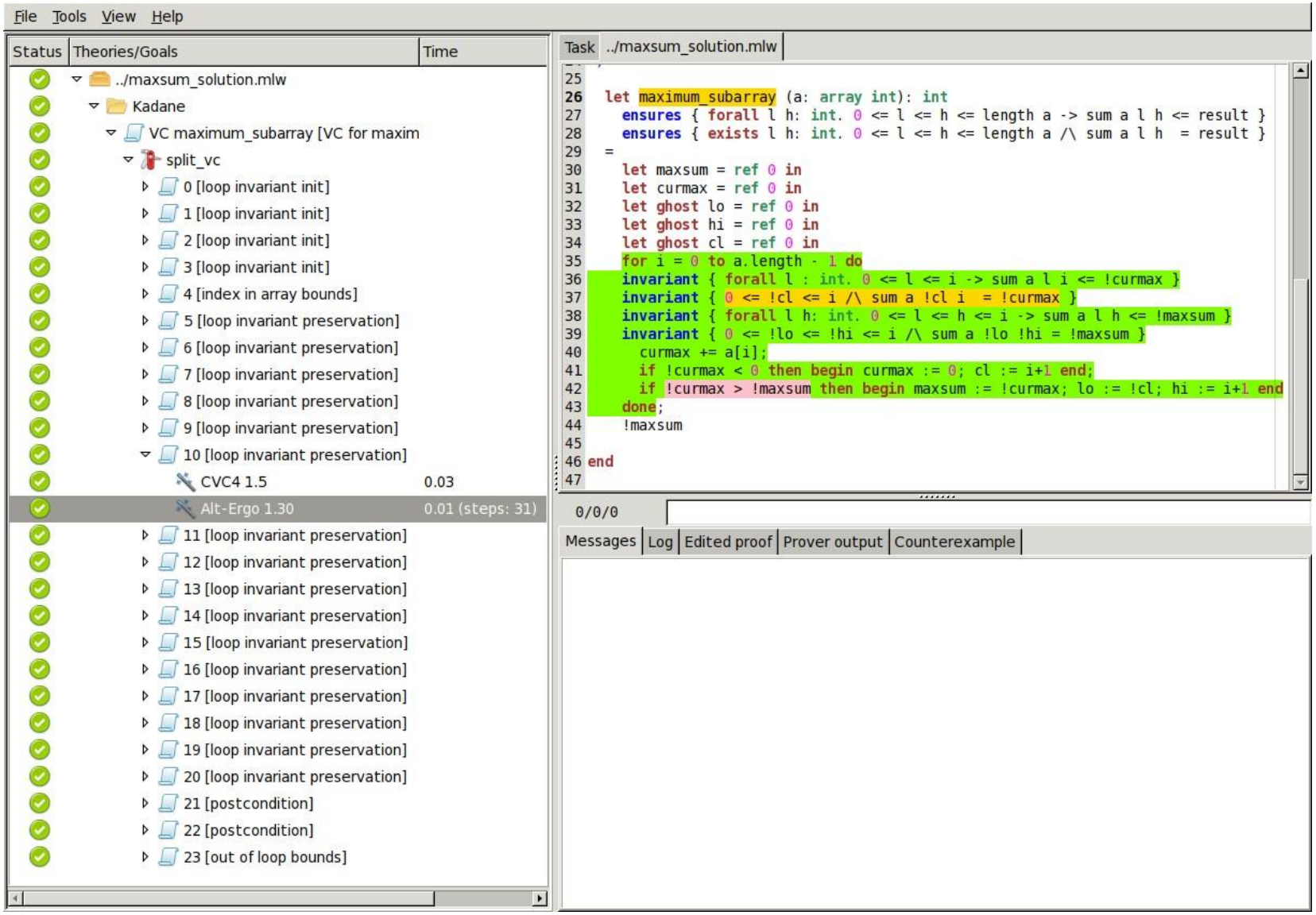
Перечень доступных трансформаций:

why3 --list-transforms

Запуск трансформаций из командной строки либо через раздел Tool в верхнем меню

Трансформации упорядочены по алфавиту

Why3 proof session



Приведение цели к нормальному виду

Нажать раздел **task** в верхнем правом меню.

Внизу – доказываемая формула (цель), выше - контекст

Контекст: определения типов, констант, аксиом, функций, предикатов, … в проекции на цель.

Гипотезы (аксиомы): посылки + подкванторные переменные – появляются непосредственно выше после нормализации цели. Имя гипотезы

introduce_premises – полная нормализация цели

intros <имена переменных через запятую > – вынесение подкванторных переменных с назначением имен соответствующих констант

intros_n <целое> – вынесение указанного числа подкванторных переменных

Подстановка определения

Подстановка тела нерекурсивного определения на место вызова функции (предиката) с заменой вхождений формальных параметров на соответствующие фактические параметры

inline_goal – для всех вызовов только внутри цели

inline_all – везде, в цели и гипотезах

inline_trivial – подставить и удалить определения вида

function f x_1 ... x_n = g e_1 ... e_k

predicate p x_1 ... x_n = q e_1 ... e_k

e_i – простой или x_j, каждое x_1 ... x_n встречается не более 1 раза

unfold <имя определения> [**in** <имя гипотезы>] – подстановка определения с данным именем в цели или указанной гипотезе

Декомпозиция гипотез

destruct <имя гипотезы> – устраняет конструкцию (операцию) верхнего уровня в указанной гипотезе.

Применяется к конструкциям вида:

- **false**, **true**,
- /\, \/, ->, **not**,
- **exists**,
- **if** ... **then** ... **else** ...,
- **match** ... **with** ... **end**,
- (не)равенство выражений одного типа.

destruct_rec <имя гипотезы> – многократное применение трансформации **destruct**

destruct_term <имя переменной> – декомпозиция по альтернативам (конструктурам) типа переменной

eliminate_if_term – вынос **if** . **then** . **else** на верхний уровень

split_premise_right – гипотезы в конъюнктивной форме заменяются несколькими гипотезами

split_premise_full – предварительно приводятся в конъюнктивную форму

Расщепление

split_goal_right – цель в виде конъюнкции формул заменяется набором целей для каждого конъюнкта исходной цели.

Цель вида A && B заменяется целями A и A -> B

Цель вида A \/ B -> C заменяется целями A -> C и B -> C

Цель вида A || B -> C заменяется на A -> C и (**not** A) /\ B -> C

Цели вида **if** , **match** ...

split_goal_full – предварительно преобразуется в конъюнктивную форму

split_vc – стандартная агрессивная стратегия, предварительно проводит нормализацию цели

case **(**<формула>**)** – расщепляет на две цели для истинного и ложного значений <формулы>

case **(**<формула>**)** **as** <имя гипотезы>

Расщепление при **destruct** и других трансформациях

Применение теорем

apply <имя гипотезы> – применение правила modus ponens. Пусть: h: f -> p; G: p. Трансформация **apply** h заменяет исходную цель на G: f . Для подкванторных переменных в h определяется замена на подходящие термы.

apply <имя гипотезы> **with** <терм> – трансформация с подсказкой.

assert (<формула>) – вводит новую цель, с помощью которой доказывается исходная цель. Для цели G: p трансформация **assert** (f) дает две цели h: f и G: f -> p

assert (<формула>) **as** <имя гипотезы>

cut (<формула>) – как и **assert,** но с другим порядком генерируемых целей

Действия с кванторами

exists <терм> – подстановка в цели <терма> на место переменной под квантором существования

instantiate <имя гипотезы> <список термов через запятую> – создается новая гипотеза с заменой кванторных переменных указанными термами.

inst_rem <имя гипотезы> <список термов через запятую> – как **instantiate** с удалением исходной гипотезы

Дизъюнктивная форма. Замены

left – удаление правой части дизъюнктивной формы

right – удаление левой части дизъюнктивной формы

pose <имя> <терм> – введение новой гипотезы вида <имя> = <терм>

remove <список имен гипотез> – удалить указанные гипотезы

replace <терм1> <терм2> [**in** <имя гипотезы>] – в цели или гипотезе <терм1> заменяется на <терм2>. Генерируется дополнительная цель: <терм1> = <терм2>

rewrite <имя гипотезы> - заключительная часть гипотезы имеет вид <терм1> = <терм2>. В цели <терм1> меняется на <терм2>. Посылки гипотезы дают новые цели. Для подстановки подкванторных переменных используется подсказка вида **with** <терм>

Доказательство по индукции

induction <имя переменной> – доказательство по индукции для текущей цели: h : p1 n, G: p n. Команда **induction** n дает две цели.

h : p1 n, Init: n<=0, G: p n

h : p1 n, Init: n>0, hRect: **forall** n1:int. n1 < n -> p1 n1 -> p n1, G: p n

Предварительно следует свернуть зависимость от n

revert – собрать гипотезы в цель, обратная к intros

induction_ty_lex <имя> – для алгебраических типов

Особенности доказательства

Преимущества последней версии. Новые трансформации

Оператор assert { … }

Лемма-функции вместо доказательства по индукции

Возможности полного доказательства в Why3.

Перевод доказательства в Coq

Список трансформаций отдельным файлом

Пример программы на языке WhyML

```
use int.Int     (** three global mutable variables *)
val ref x : int
val ref y : int
val ref z : int
              (** computes the maximum of `x` and `y` and stores the result in `z` *)
let compute_max_x_y_in_z ()
  requires { true }
  ensures  { z = x \/ z = y }
  ensures  { z >= x /\ z >= y }
=
  if x <= y then z <- y else z <- x
              (** computes the half of `x` (very inefficiently) stores the result in `y` *)
let compute_half_of_x ()
  requires { x >= 0 }
  ensures  { 2*y = x \/ 2*y+1 = x }
=
  y <- 0;
  while 2*(y+1) <= x do
     invariant { 2*y  <= x }
     y <- y+1
  done
```

Пример. Использование меток

Ability to refer to past values of variables

```
{ true }
let v = r in (r <- v + 42; v)
{ r = r@old + 42 ∧ result = r@old }

{ true }
let tmp = x in x <- y; y <- tmp
{ x = y@old ∧ y = x@old }
```

SUM revisited:

```
{ y ≥ 0 }  L:
while y > 0 do
invariant { x + y = x@L + y@L }    x <- x + 1; y <- y - 1
{ x = x@old + y@old ∧ y = 0 }
```